Adı-Soyadı: CEVAP ANAHTARI **20.11.2018**

Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Mat 301 Diferansiyel Geometri I Arasınav Soruları

1. A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzay olsun. A da belli bir $P_0 \in A$ noktası tespit edildiğinde başlangıç noktası P_0 olan bir afin çatı daima vardır, ispatlayınız.
2. E^3 de $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemi verilsin. Bir $V \in \chi(E^3)$ vektör alanını; $P=(p_1,p_2,p_3)$ noktasından $(1+p_1,\ p_2p_3,\ p_2)$ noktasına giden $\overrightarrow{V_p}$ tanjant vektörü için $\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ standart formunda yazınız.
3. $\forall X \in \chi(E^3)$ vektör alanı için $div(rotX)$ bileşke dönüşümünü bulunuz.
4. E^3 de bir $P=(2,1,0)$ noktasında $\overrightarrow{V_p}=(2,-1,3) \in T_{E^3}(P)$ tanjant vektörünün $f(x_1,x_2,x_3)=e^{x_1}\cos x_2$ fonksiyonu yönündeki $\overrightarrow{V_p}[f]$ yönlü türevini bulunuz.
5. $\alpha : I \to E^3$, $\alpha(s)=(\cos s, \sin s, 5)$ eğrisinin $\alpha(0)$ noktasındaki Frenet vektörlerini bulunuz.

Başarılar

Prof. Dr. Emin KASAP

1- boy $V = n$ olmak üzere V'nin bir bazı $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ olsun. A afin uzayında P_0 noktasını tespit edelim. Böylece (A2) afin aksiyomu gereğince

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

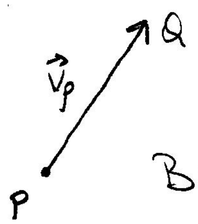
olacak şekilde bir tek $P_i \in A$ noktası vardır. Yani P_0 tespit noktası için $P_1, P_2, \dots, P_n \in A$ noktaları mevcuttur. $\{\alpha_i\}$ sistemi V nin bir bazı olduğundan $\overrightarrow{P_0P_i} = \alpha_i$ için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi de V'nin bir bazıdır. O halde, afin çatı tanımına göre

$$\{P_0, P_1, \dots, P_n\} \text{ nokta kümesi } A \text{ da}$$

bir afin çatı olur.

2- $P = (p_1, p_2, p_3)$ noktasından $(1+p_1, p_2p_3, p_2)$ noktasına giden $\vec{V}_P$ tanjant vektörü

$$\vec{V}_P = \vec{PQ} = Q - P = (1+p_1, p_2p_3, p_2) - (p_1, p_2, p_3)$$
$$= (1, p_2p_3 - p_2, p_2 - p_3) \text{ dır.}$$



Bir $V \in \mathcal{X}(E^3)$ vektör alan $P = (p_1, p_2, p_3) \in E^3$ için

$$V(P) = \vec{V}_P = (1, p_2p_3 - p_2, p_2 - p_3)$$
$$= (1, x_2(P)x_3(P) - x_2(P), x_2(P) - x_3(P))$$
$$= (1, x_2x_3 - x_2, x_2 - x_3)(P)$$

$\Rightarrow V = (1, x_2x_3 - x_2, x_2 - x_3)$ olup standart formda

$$V = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2x_3 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 - x_3)\frac{\partial}{\partial x_3} \text{ yazılır.}$$

3- $\text{rot} : \mathcal{X}(E^3) \longrightarrow \mathcal{X}(E^3)$

$$X \longrightarrow \text{rot}X = \nabla \times X$$

$\text{div} : \mathcal{X}(E^3) \longrightarrow \mathcal{X}(E^3)$

$X \longrightarrow \text{div}\, X = \langle \nabla, X \rangle$ olmak üzere

$\forall X \in \mathcal{X}(E^3)$ için

$$(\text{div} \circ \text{rot})(X) = \text{div}(\text{rot}\, X)$$
$$= \langle \nabla, \nabla \times X \rangle$$
$$= \det(\nabla, \nabla, X)$$
$$= 0$$

4- Bir f fonksiyonunun $\vec{V}_p$ tanjant vektörü yönündeki yönlü türevi

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt}\left(f(p+t\vec{v})\right)\Big|_{t=0}$$ şeklindedir.

$P = (2, 1, 0) \in E^3$ ve

$\vec{V}_p = (2, -1, 3) \in T_{E^3}(P)$ için.

$$f(p+t\vec{v}) = f(2+2t,\ 1-t,\ 3t)$$
$$= e^{2+2t}\cos(1-t)$$ dır.

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt}\left(e^{2+2t}\cos(1-t)\right)\Big|_{t=0}$$
$$= \left(2e^{2+2t}\cos(1-t) + e^{2+2t}\sin(1-t)\right)\Big|_{t=0}$$
$$= 2e^2\cos 1 + e^2 \sin 1$$
$$= e^2(2\cos 1 + \sin 1) \in \mathbb{R}$$ bulunur.

2. YOL : $\vec{V}_p[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$, $\vec{V}_p = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 = 2$, $v_2 = -1$, $v_3 = 3$

$$\vec{V}_p[f] = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_p + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_p$$

$$= 2\left(e^{x_1}\cos x_2\right)\Big|_p + (-1)\left(-e^{x_1}\sin x_2\right)\Big|_p + 3.0$$

$x_i : E^3 \to \mathbb{R}$
$P \to x_i(P) = P_i$

$$= 2\, e^{x_1(P)} \cos(x_2(P)) + e^{x_1(P)} \sin(x_2(P))$$

$$= 2\, e^{P_1} \cos P_2 + e^{P_1} \sin P_2$$

$$= 2e^2 \cos 1 + e^2 \sin 1$$

$$= e^2 (2\cos 1 + \sin 1) \in \mathbb{R} \text{ bulunur.}$$

5- $\alpha : I \to E^3$
$s \to \alpha(s) = (\cos s, \sin s, 5)$ eğrisi için

$$\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

$\Rightarrow \|\alpha'(s)\| = \sqrt{(-\sin s)^2 + (\cos s)^2} = 1$ olup α birim hızlıdır.

O halde Frenet vektörleri

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

şeklindedir.

$$\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

$$\alpha''(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$ olmak üzere

$s = 0$ için $\alpha(0)$ noktasındaki Frenet vektörleri $T(0), N(0), B(0)$ ile gösterilsin. O halde

$$T(0) = \alpha'(0) = (-\sin 0, \cos 0, 0) = (0, 1, 0)$$

$$N(0) = \frac{\alpha''(0)}{\|\alpha''(0)\|} = \frac{(-\cos 0, -\sin 0, 0)}{\sqrt{(-\cos 0)^2 + (-\sin 0)^2}} = (-1, 0, 0)$$

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

şeklinde elde edilir.